**«Zählen und Rechnen ist der Grund aller Ordnung im Kopf.»**

## 25 Her mit dem Taschenrechner!

Das Glas koste achtundzwanzig Franken, sagte die Verkäuferin, aber beim Kauf von einem Dutzend gebe es fünfundzwanzig Prozent Rabatt. «Also noch einundzwanzig Franken pro Glas», bemerkte ich, worauf mich die junge Dame erstaunt ansah und sagte: «Ja, es wird so um dort herum liegen.» Dann schritt sie zum Korpus, griff zum Taschenrechner, tippte 28 ein, teilte durch 100, multiplizierte mit 25 und sprach, beinahe überrascht: «Rabatt ist sieben Franken, ja, Sie haben recht, dann macht das einundzwanzig Franken.»

Der traditionelle Rechenunterricht ist zu Grabe getragen und durch Mathematik ersetzt worden. Wir können also, wenn erfahrene Lehrmeister händeringend die mangelnde oder kaum vorhandene Rechenfertigkeit der Lehrlinge beklagen, stolz erwidern: «Zugegeben, rechnen können sie nicht, aber dafür denken.»

Mich hat es stets wütend gemacht, wenn unterstellt wurde, Rechnenkönnen habe nichts mit Denken zu tun. Ich erinnere mich an einen Fünftklässler, der an einer sehr schwachen Merkfähigkeit litt und wieder einmal bei der Multiplikation 7 mal 8 stolperte. Er zog sich wie folgt aus der Affäre: «Ich probier's mit 8 mal 8, das ist gleichviel wie 4 mal 16, und das ist 2 mal 32, also 64. Und jetzt noch 8 abzählen, also 56». Weshalb das kein Denken sein soll, leuchtet mir nicht ein.

In den späten sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts wurde der Rechenunterricht einer fundamentalen Kritik unterzogen, und die Lehrpläne und Lehrmittel wurden landesweit den neuen Strömungen angepasst. Als Initialzündung für die Total-Kritik am überlieferten Rechenunterricht wird oft der «Sputnik-Schock» genannt, von dem die Amerikaner 1957 heimgesucht wurden: Sie mussten feststellen, dass ihnen die Russen in wissenschaftlich-technischer Hinsicht offenbar überlegen waren.

Die traditionelle Gestaltung des Rechenunterrichts mit seiner starken Betonung der Arithmetik wurde damals durch drei Hauptargumente in Frage gestellt:

Als *Erstes* warf man dem Rechenunterricht vor, er *fixiere das Denken* in ganz bestimmte Bahnen und verhindere das Aufkommen eines eigentlich mathematischen Denkens. Dieses sei *flexibel*, *allgemein* und *kreativ* und lasse sich nicht entwickeln durch die Fixierung auf das Zahlensystem und die Einübung in dessen Umgang mittels der Grundoperationen. Es gehe darum, das Kind den Umgang mit abstrakten Mengen und logischen Verknüpfungen zu lehren. So wurde die Mengenlehre – bisher ein Gebiet der höheren Mathematik, das an der Universität gelehrt wurde – zur Grundlage der gesamtem Mathematik und des Mathematikunterrichts erklärt. Als Übungsmaterial wurden vom amerikanischen Professor Dienes die «logischen Blöcke» (Merkmalblöcke, Sabemat) entwickelt.

Der *zweite* Vorwurf lautete, der Rechenunterricht fixiere die Arithmetik auf das *Zehnersystem*. Dieses sei aber bloss *eine* Möglichkeit unter vielen und – von mathematischem Standpunkt aus betrachtet – rein zufällig gewählt. Die Notwendigkeit der Infragestellung des Zehnersystems wurde belegt durch die Verwendung des Dualsystems in der Computertechnik.

*Drittens* wurden etwa gleichzeitig die ersten *elektronischen Taschenrechner* auf den Markt geworfen. Damit schien es, der moderne Mensch brauche auch gar nicht mehr rechnen zu können, da die Maschine dies alles schneller und zuverlässiger erledige. Aufgabe des Mathematikunterrichtes sei es, die Lösungswege zu erarbeiten, aber die rechnerische Arbeit könne man ruhig der Maschine überlassen.

Diese Argumentation wurde hierzulande übernommen, obwohl sich die Qualität unseres Rechenunterrichts nicht mit den Zuständen in den öffentlichen Schulen Amerikas vergleichen liess. Abgesehen davon, stelle ich alle drei Argumente von psychologischem und pädagogischem Standpunkt aus in Frage:

*Erstens* ist das Denken auf das Funktionieren von *Denkroutinen* angewiesen, damit es überhaupt kreativ sein kann. Einen logischen Schluss ziehen zu können, muss zuerst einmal gelernt sein. Variieren dies die Schüler in Tausenden von Rechenaufgaben, fixieren wir nicht das Denken, sondern schaffen wir Voraussetzungen, um künftige und komplexere Denkprozesse zu entlasten und auch zu ermöglichen. Im Bereich der Mathematik bestehen die basalen Denkroutinen vorab im Umgang mit Zahlbegriffen und den Grundoperationen. Selbstverständlich gehören dazu auch jene elementaren Mengenbeziehungen, die sich am Material der logischen Blöcke demonstrieren lassen. Aber die Behauptung, das Kind finde bloss durch dieses abstrakte Vorgehen einen Zugang zu den konkreteren arithmetischen Problemlösungen, ist mit Sicherheit falsch.

*Zweitens* ist das Zehnersystem psychologisch gesehen durchaus kein Zufallsprodukt, sondern leitet sich von den zehn Fingern her. Die Bezugnahme auf diese Erlebnisbasis ist in pädagogischer und psychologischer Hinsicht im wahrsten Sinne elementar. Das Abstrakte ist verankert im eigenen Körper. Darüber hinaus ist jedes andere System, um es begreifen zu können, auf die Vorstellungen und die sprachlichen Konventionen des Zehnersystems angewiesen. Das Kind braucht zuerst einmal einen inneren Massstab, um überhaupt ein Einsteigen in andere Zahlsysteme bewältigen zu können. Hinzu kommt, dass ein lernendes Kind auf jedem Gebiet zuerst Fixpunkte erwerben muss, um von da aus seine Kenntnisse und Fertigkeiten ausweiten zu können. Insbesondere die weniger begabten Schüler sind darauf angewiesen. Andernfalls züchten wir Versager.

*Drittens* kann der Taschenrechner den gedanklichen Umgang mit Zahlenwerten, das «Kopfrechnen», nicht ersetzen, denn ohne klare Zahlvorstellungen lassen sich die mechanisch erzielten Ziffernreihen nicht angemessen als Zahlen und Werte interpretieren. Darüber hinaus stellt das tägliche Leben viele Rechenaufgaben, zu deren Bewältigung nicht dauernd nach dem Rechner gegriffen werden kann. Und schliesslich dient das Kopfrechnen ganz allgemein – im Pestalozzischen Sinne – der Entwicklung von Kräften: Vorstellungskraft, Fähigkeit zur kurzzeitigen Speicherung abstrakter Inhalte, Fähigkeit zum inneren Umgang mit abstrakten Gehalten, Konzentrationsfähigkeit. In der Bildung geht es nicht ums schnellstmögliche Produzieren von Resultaten, sondern um den Denkprozess an sich, denn nur durch das Denken selber kann sich die Denkfähigkeit entwickeln.

In den letzten Jahrzehnten sind allmählich die in den sechziger und siebziger Jahren vertretenen ideologischen Positionen wieder in den Hintergrund getreten. Geblieben sind meines Erachtens drei Relikte, die mitschuldig sind an den ungenügenden arithmetischen Fertigkeiten unserer Schulabgänger:

*Die Abwertung des Dreisatzes.* Für die Verfechter der sogenannten Neuen Mathematik war die «Abschaffung des Dreisatzes» beinahe eine Glaubens- oder gar eine moralische Frage. Das mache «man» heute nicht mehr; «man» sehe jetzt diese Probleme als Proportionen. Dessen ungeachtet bleiben auch da beim Ausrechnen eine Division und eine Multiplikation. Man dient aber durch die Verbannung des Sprachlichen aus der Mathematik den Kindern nicht, und den schwächeren macht man es besonders schwer. Alles was auf dieser Stufe mathematisch gedacht wird, soll sprachlich ausdrückbar sein. Dann wurzelt das Denken in klaren Vorstellungen. Im sauber hingeschriebenen Dreisatz, in welchem auch die Einheiten korrekt einbezogen sind, bildet sich die Stufenfolge eines korrekten logischen Gedankengangs ab.

*Die Abschaffung der Unterscheidung zwischen Messen und Teilen bei der Division.* Für einen Mathematiker, der bloss noch abstrakt denkt und der sich bei einer Multiplikation weder bei der Bedeutung der Faktoren noch des Operators «mal» etwas Konkretes denkt, mag das hingehen. Aber für einen Schüler, der zuerst einmal begreifen können muss, wie das alles zustande kommt, ist diese Vermischung und Nichtunterscheidung Gift. Jeder Rechenoperation und jedem Operator muss zuerst eine sinnliche, physisch nachvollziehbare, dann eine vorgestellte *Handlung* zugrunde liegen. Und da ist es beim besten Willen nicht dasselbe, ob ich – als Beispiel – eine Strecke von drei Metern in sechzig gleiche Teile zerstückle, oder ob ich mich vergewissere, wie oft eine Einheit von sechzig Zentimetern in den drei Metern enthalten ist. Dieser vollkommen sinnfällige Tatbestand erfordert seine Entsprechung in der mathematischen Abbildung, einschliesslich der sprachlichen Formulierung: Im ersten Fall wird geteilt, im zweiten Fall gemessen. Der Divisions-Operator hat also zwei logisch und sprachlich klar zu unterscheidende Bedeutungen.

Analog dazu muss der Multiplikations-Operator eine in Handlung und sinnlicher Vorstellung ausführbare Bedeutung haben. Die kommt nur zustande in der Verbindung mit dem ersten Faktor, der stets die Anzahl angibt. Liegen auf dem Tisch sieben Lineale zu je dreissig Zentimetern, so wiederholt sich die Einheit (stets der zweite Faktor) siebenmal. Kommutativgesetz hin oder her: Für den Rechenanfänger, der sein Denken in Handlungen und Vorstellungen verankern soll und auch verankern *können* soll, ist angesichts dieser Problemlage die Rechnung «dreissig mal sieben Zentimeter» schlichtweg falsch, obwohl es ein richtiges Resultat ergibt.

Der Schüler soll auch einsehen lernen, dass man beim Dividieren eine real erfolgte oder denkbare Multiplikation rückgängig macht. Und dann gilt:

Mache ich den *ersten* Faktor (die Anzahl) zum Divisor, so *teile* ich, und das Resultat ist die Einheit. Mache ich hingegen den *zweiten* Faktor (die Einheit) zum Divisor, so *messe* ich, und das Resultat ist die Anzahl. Die Nichtunterscheidung von Messen und Teilen hat keineswegs zu mathematischerem Denken, sondern zu unklarem, nicht in der Vorstellung verankertem Umgang mit Zahlen geführt. Die Leidtragenden sind die Kinder, allen voran die schwächeren, die ganz besonders auf konkrete Handlungen und Vorstellungen angewiesen sind.

*Die allgemeine Minderbewertung der Arithmetik, des Kopfrechnens und des Automatisierens.* Sie ist die Folge davon, dass die mathematischen Stoff- und Übungsgebiete ausgedehnt und auch variantenreicher gestaltet wurden. Das macht den Mathematikunterricht – insbesondere für die Begabteren – zweifellos abwechslungsreicher. Leider bleibt dabei für das Üben der elementaren Fertigkeiten einfach zu wenig Zeit. Darum ist zu fragen: Wäre weniger nicht vielleicht mehr?

Bei der Grundlegung der Arithmetik habe ich sehr gute Erfahrungen mit der Methode Cuisenaire gemacht. Sie geht beim Rechnen *nicht synthetisch*, sondern *analytisch* vor. Ausgangspunkt ist jeweils nicht eine konkrete Fragestellung wie beispielsweise «wie viel ergibt sechs mal sieben», sondern das Ergebnis: «Was *alles* ergibt zweiundvierzig?» Im Zentrum steht die Zahlbetrachtung. Die synthetische Vorgehensweise lässt bei einem Problem nur *eine* Lösung zu. Bei der analytischen Methode hingegen ist die Problemsituation *völlig offen*. Dies setzt der Freiheit und Kreativität des Schülers kaum mehr Grenzen und steigert insbesondere seine Motivation zum Lernen. Auch werden ungleich begabte Schüler ihren *jeweiligen Fähigkeiten gemäss* gefordert, ohne versagen zu müssen.

Eigentlich möchte ich nicht, wie eingangs erwähnt, einem Kritiker unserer Schule sagen müssen: «Ja, rechnen können sie nicht, aber dafür denken.» Lieber wäre mir: «Weil sie denken gelernt haben, können sie auch rechnen.»